Opérateurs différentiels

On étudie en géosciences des fonctions scalaires des coordonnées d'espace, comme la température, ou bien des vecteurs dont les trois composantes sont des fonctions des coordonnées, comme la pesanteur ou le champ magnétique. Lorsque ces fonctions ont des dérivées partielles, on peut définir d'autres scalaires ou vecteurs qui restent les mêmes pour tout référentiel, ce qu'on appelle des *invariants* de la fonction ou du champ de vecteurs. Ils en fournissent des propriétés intrinsèques et locales.
Pour une fonction, les invariants qui nous seront utiles sont le *gradient* (un vecteur) et le *laplacien* (un scalaire). Pour un champ de vecteurs ce sont le *rotationnel* (un vecteur), *la divergence* (un scalaire) et le *laplacien vectoriel* (un vecteur).

1 Produit scalaire et vectoriel

Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ayant pour composantes dans un référentiel cartésien a_x, a_y, a_z et b_x, b_y, b_z respectivement. On définit :
- le produit scalaire : $\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- le produit vectoriel : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$

2 Notion de circulation d'un champ de vecteurs

On appelle travail de A à B du vecteur $\vec{a}$ le long d'une courbe (C), dont un segment infinitésimal est le vecteur $\vec{dl}$, la somme des produits scalaires infinitésimaux

$$\int_A^B \vec{a}.\vec{dl}.$$

Lorsque (C) est une courbe fermée ($A = B$), la position de A sur (C) n'a pas d'importance, seulement le sens de parcours. Le travail est alors appelé la *circulation* de $\vec{a}$ sur (C),

$$\oint \vec{a}.\vec{dl}.$$

3 Notion de flux d'un champ de vecteurs

Considérons une surface continue (S). Soit $\vec{n}$ sa normale unitaire, toujours issue du même côté. On appelle *flux* du vecteur $\vec{a}$ à travers (S) le scalaire :

$$\phi = \int\int \vec{a}.\vec{n} dS$$

Cette notion sera utilisée pour introduire la divergence.

4 Le gradient

La forme différentielle totale d'une fonction $f(x, y, z)$, où x, y et z sont les trois variables de l'espace, est

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

qui peut s'écrire sous la forme d'un produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{dl}$ avec

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \vec{dl} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Le champ vectoriel $\vec{u}$ s'exprime par un opérateur nommé *gradient* que l'on note :

$$g\vec{rad}(f) = \vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Ce vecteur n'est autre qu'une extension de la classique dérivée d'une fonction à un espace de dimension supérieure. Il indique donc la pente locale de la fonction, le vecteur obtenu étant dirigé le long de la plus grande pente au champ f. $\vec{\nabla} f$ est orthogonal aux isosurfaces de f.

Expression en coordonnées cyclindriques

Sur la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\phi}, \vec{e_z})$ on a

$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Expression en coordonnées sphériques

Sur la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$ on a

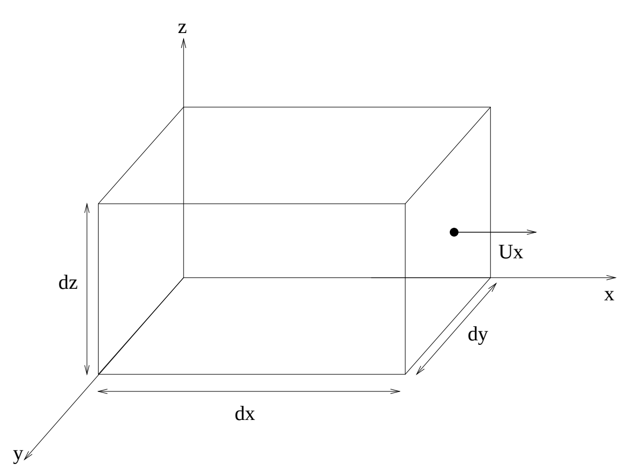
$$\vec{\nabla} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \end{bmatrix}.$$

5 La divergence

La divergence d'un champ vectoriel $\vec{u}$ est un scalaire défini par :

$$div(\vec{u}) = \vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{\partial ux}{\partial x} + \frac{\partial uy}{\partial y} + \frac{\partial uz}{\partial z}.$$

Afin de définir le sens physique de la divergence considérons un volume rectangulaire de côtés dx, dy et dz.



Le flux de $\vec{u}$ sortant de la face de droite dans la direction x est $u_x(x+dx,y,z)dydz$. De même le flux de $\vec{u}$ entrant par la face de gauche dans la direction x est $-u_x(x,y,z)dydz$. Le bilan de flux entre ces deux surfaces est donc

$$[u_x(x+dx,y,z)-u_x(x,y,z)]dydz = \frac{\partial u_x}{\partial x}dxdydz = \frac{\partial u_x}{\partial x}dV$$

Le même raisonnement peut être fait dans la direction y et dans la direction z. Le bilan de flux au travers des faces du volume peut donc s'écrire

$$d\phi = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)dV = (\vec{\nabla}.\vec{u})dV.$$

L'équation ci-dessus permet d'exprimer ce qu'est la divergence : la divergence est donc le bilan de flux d'un champ de vecteurs par unité de volume. Sous forme intégrale on obtient le théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky) :

$$\oint\oint \vec{u}.d\vec{S} = \int\int\int_{int} div(\vec{u})dV$$

Le flux à travers une surface fermée S d'un champ $\vec{u}$ est égale à l'intégrale sur tout le volume délimité par S de la divergence de $\vec{u}$.
Si $\vec{u}$ est un champ de vitesse, alors la divergende de $\vec{u}$ mesure l'accroissement total de volume par unité de temps et par unité de volume. Si en un point A la divergence est positive (négative) alors A est un point d'expension (de compression). Si la divergence de $\vec{u}$ est nulle en tout point d'une région D alors le corps ayant le champ de vitesse $\vec{u}$ est incompressible dans cette région.

Expression en coordonnées cyclindriques

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Expression en coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\ u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\ \sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\ u_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\ \sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}$$

6 Le rotationnel

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{u}$ est un vecteur défini par

$$\vec{rot}\vec{u} = \vec{\nabla}\wedge\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

On interprète le rotationnel $\vec{\nabla}\wedge\vec{u}$ comme l'axe d'un tourbillon en mécanique des fluides, le champ $\vec{u}$ représentant la vitesse du liquide.
Le rotationnel d'un gradient est nul :

$$\vec{rot}(\vec{grad}(f) = \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}f = \vec{0}$$

Soit $\vec{u}$ un champ vectoriel et (C) un contour fermé. On peut montrer que le flux du rotationnel de $\vec{u}$ à travers une surface s'appuyant sur (C) est égale à la circulation le long de (C) du champ $\vec{u}$. Ce théorème est appelé théorème du rotationnel (Stokes)

$$\oint \vec{u}.\vec{dl} = \int\int \vec{\nabla}\wedge\vec{u}.d\vec{S}$$

Expression en coordonnées cyclindriques

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\ u_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial (r\ u_r)}{\partial \phi}\right) \end{bmatrix}.$$

Expression en coordonnées sphériques

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta\ u_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}\right) \\ \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r \sin\theta\ u_\phi)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \end{bmatrix}.$$

7 Le laplacien

Le dernier opérateur que nous utiliserons est le laplacien. Le laplacien est défini comme la divergence du gradient. On distingue le laplacien scalaire

$$laplacien(f) = div(\vec{grad}(f)) = \Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

De même on définit le laplacien vectoriel comme

$$\vec{\Delta}\vec{u} = \vec{\nabla}^2 \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}.$$

Le laplacien d'une fonction mesure la différence entre la valeur de la fonction en un point et sa moyenne autour de ce point. Ainsi le laplacien est nul ou très petit lorsque la fonction varie sans à coups.

Expression en coordonnées cyclindriques

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Expression en coordonnées sphériques

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\ \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\ \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

8 Relations fondamentales

$$div(\vec{grad}) = laplacien$$

$$div(\vec{rot}) = 0$$

$$\vec{rot}(\vec{rot}) = \vec{grad}(div) - laplacien$$

$$\vec{rot}(\vec{grad}) = \vec{0}$$

9 Exercices

1. On considère un champ $\vec{v}$ purement divergent en 2D
   (a) Déterminer le système d'équations différentielles vérifié par les composantes du champ $\vec{v}$
   (b) Donner un exemple simple de vecteur $\vec{v}$
   (c) Tracer le champ $\vec{v}$
2. Idem mais pour un champ purement rotationnel.